La tablette de chocolat

Dans un magasin, on peut acheter une tablette de chocolat d'une certaine marque.
Dans l'emballage on y trouve un bon avec la notice : pour 10 bons on reçoit une tablette de chocolat (avec son coupon) de cette marque-là.
Que vaut exactement (en chocolat) une tablette avec son coupon ?

Premier raisonnement :

Elle vaut plus qu'une tablette (puisque 10 coupons valent une tablette entière), plus bien sûr un dixième de coupon ; si un coupon vaut $\frac{1}{10}$ de tablette, $\frac{1}{10}$ de coupon vaut $\frac{1}{100}$ de tablette. Ce $\frac{1}{100}$ de tablette est accompagné de $\frac{1}{100}$ de coupon, qui vaut $\frac{1}{1000}$ de tablette de chocolat, et ainsi de suite, jusqu'à l'infini. On voit que cette suite ne s'arrête jamais et que la tablette de chocolat avec son coupon vaut : $1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+\ldots$ de tablette de chocolat.

Que vaut cette somme infinie x = $1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+\ldots$??

On peut écrire x = 1,11111… = $1{,}\bar{1}$. Comme 10x = $11{,}\bar{1}$, on aura 10x – x = $11{,}\bar{1}-1{,}\bar{1}$ = 10, donc 9x = 10 et x = $\frac{10}{9}$.

Deuxième raisonnement, plus pragmatique :

Montrer que le coupon de la tablette vaut exactement $\frac{1}{9}$ de chocolat (sans coupon), donc que 9 coupons valent une tablette de chocolat (sans coupon).
Supposons que, détenant 9 coupons, je dise au magasinier " Donnez-moi une tablette de chocolat, je la mangerai ici et je vous paierai après" ; que je mange la tablette de chocolat en en prélevant le coupon et en ajoutant ce coupon aux 9 autres : je possède alors 10 coupons, c'est-à-dire l'équivalent d'une tablette de chocolat avec coupon, et je paye le magasinier en lui donnant les 10 coupons. Ainsi la valeur exacte de 9 coupons est bien une tablette de chocolat sans coupon, donc la valeur d'une tablette de chocolat avec coupon et 1 + $\frac{1}{9}$ de tablette de chocolat (sans coupon)

Ainsi, la somme infinie x = $1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+\ldots$ = 1 + $\frac{1}{9}$ de la façon la plus concrète puisque consommable !

Cela pourrait nous paraître logique si l'on raisonne ainsi : en partant de 1, on lui additionne $\frac{1}{10}$ (qui est un nombre positif), puis $\frac{1}{100}$, puis $\frac{1}{1000}$ ainsi de suite ; le nombre augmente toujours, mais de moins en moins. Et comme ce nombre que l'on rajoute est de plus en plus petit et se rapproche de zéro, au bout du processus le nombre "s'essouffle" on peut bien imaginer qu'il ne dépassera pas un certain "plafond" (une certaine valeur maximale, ici $\frac{10}{9}$).

Est-ce que ce critère, semble-t-il nécessaire est suffisant ?

Que penser de la somme infinie suivante : $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$?